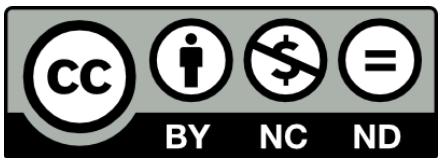
Topología I
Examen XVI



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Topología I
Examen XVI

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Lucía Benjumeda Maldonado

Granada, 2026

Asignatura Topología I.

Curso Académico 2026-27.

Grado Grado en Matemáticas.

Grupo B.

Profesor Manuel César Rosales Lombardo.

Descripción Parcial.

Fecha 19 de noviembre de 2026.

Ejercicio 1. En $\mathbb{R}$, se considera la topología T de la que conocemos una base dada por:

$$\mathcal{B} = \{[-r, r] \quad : \quad r > 0\}.$$

1. Estudiar si $(\mathbb{R}, T)$ es un espacio T_1. ¿Es cierto que $T \cap C_T = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$?
   Veamos que $(\mathbb{R}, T)$ no es un espacio T_1. Se puede ver claramente tomando $x = 0$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (por ejemplo, $y \in \mathbb{R}^+$). Para cualquier abierto $U_y \in T$ tal que $y \in U_y$, como $\mathcal{B}$ es base de T, existe algún básico $[-r, r] \in \mathcal{B}$ (con $r > 0$) tal que $y \in [-r, r] \subseteq U_y$. Sin embargo, como $r > 0$, se cumple que $0 \in [-r, r] \subseteq U_y$. Es decir, 0 está en todo abierto no vacío de T. Por tanto, todo punto distinto de 0 comparte todos sus entornos con el 0, luego $(\mathbb{R}, T)$ no es T_1 (de hecho, ni siquiera es T_0).

   Para probar que $T \cap C_T = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, lo haremos por doble inclusión:

   $\supseteq$ Es evidente que $\emptyset, \mathbb{R} \in T \cap C_T$ por definición de topología.

   $\subseteq$ Ahora veamos que sea $U \in T \cap C_T$ con $U \neq \emptyset$, probemos que $U = \mathbb{R}$.
   Como $U \in T$ y $U \neq \emptyset$, es unión de elementos de $\mathcal{B}$ y, como hemos visto antes, todo básico contiene al 0, luego $0 \in U$.
   Por otro lado, como $U \in C_T$, su complementario $V = \mathbb{R} \setminus U$ es abierto. Si $V \neq \emptyset$, al ser también unión de elementos de $\mathcal{B}$, tendríamos que $0 \in V = \mathbb{R} \setminus U$ lo cual es una contradicción porque $0 \in U \Rightarrow V = \emptyset$, de donde concluimos que $U = \mathbb{R}$.

2. Para cada $x \neq 0$, encontrar una base de entornos de x en $(\mathbb{R}, T)$ con un único elemento. La base de entornos más económica (de cardinal 1) viene dada por:

   $$\mathcal{B}_x = \{[-x, x]\} \text{ si } x > 0, \qquad \mathcal{B}_x = \{[x, -x]\} \text{ si } x < 0$$

   (es decir, $\mathcal{B}_x = \{[-|x|, |x|]\}$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).
   Probemos que $\mathcal{B}_x$ es efectivamente una base de entornos para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

   - **Reflexividad puntual:** $\mathcal{B}_x \neq \emptyset$ y para el único elemento $V = [-|x|, |x|] \in \mathcal{B}_x$ se cumple claramente que $x \in [-|x|, |x|] = V$.
   - **Intersección finita:** Sean $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_x$. Como $\mathcal{B}_x$ es unitaria, necesariamente $V_1 = V_2 = [-|x|, |x|]$. Tomando $V_3 = [-|x|, |x|] \in \mathcal{B}_x$, se verifica trivialmente que $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$.
   - **Axioma de Bourbaki:** Sea $V = [-|x|, |x|] \in \mathcal{B}_x$. Como $|x| > 0$, tenemos que $V \in \mathcal{B} \subseteq T$ es decir, V ya es abierto, luego entorno de todos sus puntos por un entorno básico ($\forall y \in V \quad \exists V_y \in \mathcal{B}_y$ tal que $y \in V_y \in V$)

   Probado así que $\mathcal{B}_x$ conforma una base de entornos para cada $x \neq 0$.

3. Demostrar que $(\mathbb{R}, T)$ cumple el primer axioma de numerabilidad pero no el segundo.
   Teniendo definida la base de entornos $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, agregemos también para $x = 0$, de manera que:

   $$\begin{cases} \mathcal{B}_x = \{[-|x|, |x|]\} & \text{para todo } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \mathcal{B}_0 = \{0\} & \text{que es en realidad un caso particular donde } \{0\} = [-0, 0] \end{cases}$$

Luego $\mathcal{B}_x$ es finita $\forall x \in \mathbb{R}$ y, por tanto, numerable.

Ahora veremos que no cumple el segundo axioma de numerabilidad. Supongamos por reducción al absurdo que $(\mathbb{R}, T)$ es (2AN). Como $\mathcal{B}$ es una base de la topología T, por ser (2AN) existirá una subfamilia numerable $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}$ que también es base de T:

$$\mathcal{B}_n = \{[-r_n, r_n] : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{con } r_n \in \mathbb{R}^+.$$

Sea $R = \{r_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^+$. Como R es numerable y $\mathbb{R}^+$ es no numerable, se tiene que $\mathbb{R}^+ \setminus R \neq \emptyset$.

Tomemos $x \in \mathbb{R}^+ \setminus R \Rightarrow [-x, x] \in \mathcal{B} \subseteq T$, por lo que es abierto y debe expresarse como unión de elementos de $\mathcal{B}_N$:

$$[-x, x] = \bigcup_{n \in J} [-r_n, r_n] \quad \text{para algún } J \subseteq \mathbb{N}.$$

Como $x \in [-x, x]$, existe algún $n_0 \in J$ tal que $x \in [-r_{n_0}, r_{n_0}]$, lo que implica que $x \leq r_{n_0}$. Por otro lado, como $[-r_{n_0}, r_{n_0}] \subseteq [-x, x]$, también se cumple que $r_{n_0} \leq x$. De ambas desigualdades deducimos que $r_{n_0} = x$, lo cual es una contradicción pues $x \notin R$. Por tanto, no existe base numerable y $(\mathbb{R}, T)$ NO es (2AN).

4. Calcular el cierre en $(\mathbb{R}, T)$ del conjunto $A = \{1\}$ y el interior del conjunto $C = (-3, 5)$

   - **Probemos que** $\overline{A} = \mathbb{R} \setminus]-1, 1[$**:**

     $\subseteq$) Probemos por contrarrecíproco que si $x \in]-1, 1[= \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus]-1, 1[)$, entonces $x \notin \overline{A}$ (es decir, que ningún punto fuera de $\mathbb{R} \setminus]-1, 1[$ pertenece a la adherencia)
     Si $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, sabemos que $|x| < 1$. Considerando su entorno básico $[-|x|, |x|] \in \mathcal{B}_x$, es evidente que $[-|x|, |x|] \cap \{1\} = \emptyset$ pues $|x| < 1$. Por tanto, $x \notin \overline{A}$.
     Por contrarrecíproco, todo $x \in \overline{A}$ cumple que $x \in \mathbb{R} \setminus]-1, 1[$.

     $\supseteq$) Sea $x \in \mathbb{R} \setminus]-1, 1[$ arbitrario, es decir, $|x| \geq 1$. Como $x \neq 0$, su base de entornos es $\mathcal{B}_x = \{[-|x|, |x|]\}$. Dado que $|x| \geq 1$, se tiene que $[-1, 1] \subseteq [-|x|, |x|]$, por lo que:

     $$[-|x|, |x|] \cap \{1\} = \{1\} \neq \emptyset.$$

     Como el único entorno básico de x corta a A, todo entorno de x corta a A, de donde $x \in \overline{A}$.

   - **Ahora veamos que** $C^\circ =]-3, 3[$**:**

     $\subseteq$) Probemos por contrarrecíproco que si $x \in \mathbb{R} \setminus]-3, 3[$, entonces $x \notin C^\circ$.
     Sea $x \in \mathbb{R} \setminus]-3, 3[$, es decir, $|x| \geq 3$. Como $x \neq 0$, su único entorno básico es $[-|x|, |x|]$. Dado que $|x| \geq 3 \Rightarrow [-|x|, |x|] \not\subseteq C$, lo que equivale a probar que $[-|x|, |x|] \cap (\mathbb{R} \setminus C) \neq \emptyset$.

Efectivamente $-3 \in [-|x|, |x|] \cap (\mathbb{R} \setminus C) \Rightarrow [-|x|, |x|] \not\subseteq C$, lo que implica que ningún entorno de x está contenido en C, luego $x \notin C^\circ$. Por contrarrecíproco, $C^\circ \subseteq]-3, 3[$.

$\supseteq$) Sea $x \in]-3, 3[$. Si $x = 0$, el básico $[-1, 1]$ es un entorno de 0 contenido en $(-3, 5)$, luego $0 \in C^\circ$.
Si $x \in]-3, 3[\setminus\{0\}$, entonces $|x| < 3$, por lo que su entorno básico cumple:

$$x \in [-|x|, |x|] \subseteq]-3, 3[\subseteq (-3, 5) = C,$$

de donde concluimos directamente que $x \in C^\circ$.

5. Probar que si un subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ es discreto, entonces consta de un único punto.
Veamos que si $(D, T_{|D}) = (D, T_d)$, por definición de topología inducida tendremos que:

$$T_{|D} = \{U \cap D : U \in T\} = \left\{ U \cap D : U = \bigcup_{i \in I} B_i \text{ con } B_i \in \mathcal{B} \right\}$$

Y por tanto su base es $\mathcal{B}_D = \{B \cap D : B \in \mathcal{B}\} = \{[-r, r] \cap D : r > 0\}$.

Como $(D, T_{|D})$ es discreto, todo subconjunto unitario $\{x\} \in D$ es abierto en $T_{|D}$, por lo que debe expresarse como unión de elementos de $\mathcal{B}_D$ (en particular, existe algún $r > 0$ tal que $\{x\} = [-r, r] \cap D$).

Supongamos por reducción al absurdo que D contiene al menos dos puntos distintos $x, y \in D$ $(x \neq y)$. Como $\{x\} \in T_{|D}$, existe un básico $[-r_1, r_1] \in \mathcal{B}$ (con $r_1 > 0$) tal que:

$$\{x\} = [-r_1, r_1] \cap D.$$

Como $x \in [-r_1, r_1]$, se tiene que $|x| \leq r_1$. Además, como $y \in D$ e $y \neq x$, necesariamente $y \notin [-r_1, r_1]$, por lo que $|y| > r_1$. Combinando ambas desigualdades obtenemos:

$$|x| \leq r_1 < |y| \implies |x| < |y|.$$

Ahora, como $\{y\} \in T_{|D}$, existe $r_2 > 0$ tal que $\{y\} = [-r_2, r_2] \cap D)$, por un razonamiento totalmente análogo se deduce que:

$$|y| \leq r_2 < |x| \implies |y| < |x|,$$

llegando a la contradicción $|x| < |y| < |x|$. Por tanto, D no puede tener más de un punto.